EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
Révisions du programme de lycée

Emmanuel DEGRYSE
emmanuel.degryse@univ-lorraine.fr

Introduction

Ce document a été conçu pour aider le futur étudiant à appréhender au mieux la transition entre la classe de Terminale et l'entrée en classe préparatoire.

Contrairement aux nombreux recueils d'exercices existant dans le commerce ou sur Internet (par ailleurs souvent très bien faits), celui-ci n'a pas pour but d'approfondir le programme étudié au lycée mais de s'assurer que les fondamentaux et les techniques calculatoires sont bien acquis et de mettre l'accent sur quelques points essentiels. L'équipe pédagogique a en effet observé, que le manque d'aisance dans les calculs et de maîtrise des formules pourtant étudiées parfois à plusieurs reprises en lycée, constitue un vrai obstacle qui ne permet pas à l'étudiant de se focaliser sur les notions nouvelles.

Les notions fondamentales que sont le calcul algébrique, la résolution d'équations et d'inéquations, la trigonométrie la dérivation et l'intégration, sur lesquelles l'accent a été mis dans ce document, seront certes approfondies durant le premier semestre dans le cadre des cours de mathématiques, mais les notions au programme du lycée **seront immédiatement utilisées** dans les autres matières scientifiques (Mécanique du point, Thermodynamique...), il est donc essentiel de les avoir acquises dès la rentrée. Il convient donc de mettre à profit les vacances pour **reprendre avec attention l'ensemble des cours de mathématiques du lycée** en retravaillant si nécessaire les démonstrations et exercices délicats pour s'assurer de **tout comprendre**. Les exercices proposés sont des applications immédiates de concepts au programme de lycée mais **ne pas savoir traiter quelques exercices ne préjuge absolument pas d'un échec en première année**. Un test/QCM sera organisé rapidement après la rentrée afin de détecter les difficultés éventuelles.

L'étude attentive de ce document est indispensable : elle permettra à l'étudiant motivé d'aborder la première année dans de bonnes conditions.

1 Nombres réels et calcul algébrique

1.1 Quotients de nombres réels

Sous réserve que les dénominateurs soient non nuls, on a

$$a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c},\qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\qquad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad \frac{ab}{ac}=\frac{b}{c},\qquad \frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$$

Les calculs suivants doivent être effectués sans utilisation de la calculatrice hormis pour vérifier le résultat final.

☐ **Exercice 1.1.** Écrire sous forme de fractions irréductibles les nombres ci-dessous

1. $\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{4}{5}}{\frac{1}{3}-\frac{2}{7}}$
2. $\dfrac{\frac{6}{5}+\frac{1}{3}}{-\frac{7}{3}-\frac{5}{6}}$
3. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}$
4. $\dfrac{\frac{11}{4}-\frac{1}{2}}{\frac{7}{3}+\frac{5}{6}}$
5. $\dfrac{\frac{6}{5}-\frac{3}{7}}{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}\times\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}{\frac{5}{4}-1}$
6. $\dfrac{2+\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{4}}\times\dfrac{1+\frac{1}{7}}{-1-\frac{4}{5}}$
7. $\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}}\times\dfrac{\frac{7}{6}+\frac{4}{3}}{\frac{3}{5}-\frac{5}{3}}$
8. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}$
9. $7-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}$

1.2 Les puissances entières

On rappelle que x^n est défini pour x réel si n est un entier positif ou nul ainsi que pour x non nul si n est un entier strictement négatif. Sous réserve d'existence de chaque terme ci-dessous, on a alors

$$x^0=1,\quad x^{-n}=\frac{1}{x^n},\quad x^n.x^m=x^{n+m},\quad \frac{x^n}{x^m}=x^{n-m},\quad (x^n)^m=x^{nm},\quad (x.y)^n=x^n.y^n,\quad \left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2\qquad a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

☐ **Exercice 1.2.** Simplifier les expressions suivantes

1. $\dfrac{(a^{-2}b^3)^{-3}}{(a^{-5}b^4)^{-2}}$
2. $\dfrac{(a^{-2}b^2)^3}{a^{-5}}$
3. $\dfrac{(a^2b^5a^{-4})^2}{(a^{-3}b^{-1})^4}$
4. $\dfrac{(a^5)^2(b^{-3})^{-1}c^4}{a^3b^{-2}(c^2)^{-3}}$

1.3 Racine carrée et valeur absolue

— Si $x \geq 0$, $\sqrt{x}$ est l'unique réel **positif** dont le carré vaut x.

— $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

— Sous réserve que les expressions suivantes existent, on a

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad \sqrt{a^2} = |a|, \quad \sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$|-a| = |a|, \quad |a.b| = |a|.|b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \text{ et } ||a| - |b|| \leq |a-b|$$

On rappelle qu'on appelle quantité conjuguée d'un réel de la forme $\sqrt{\mathrm{A}} + \mathrm{B}$ le réel $\sqrt{\mathrm{A}} - \mathrm{B}$. On l'utilise pour transformer certaines expressions et faire disparaître des radicaux via l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Par exemple,

$$\frac{7}{3+\sqrt{2}} = \frac{7.(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{7.(3-\sqrt{2})}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = 3 - \sqrt{2}$$

☐ **Exercice 1.3.** Écrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où a et b sont éventuellement nuls et c est le plus petit entier possible. On rappelle que $\sqrt{a^2.b} = a\sqrt{b}$ pour a et b réels positifs.

1. $3\sqrt{75} - \sqrt{27}$
2. $2\sqrt{7} - \sqrt{63}$
3. $\sqrt{24} + \sqrt{54}$
4. $(4 + 3\sqrt{2})^2 - (2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$
5. $\frac{2}{3}\sqrt{2}(3\sqrt{2} + 5)^2(3 - \sqrt{2})$
6. $(\sqrt{28} + \sqrt{7} - \sqrt{32})(\sqrt{63} + 2\sqrt{8})$

☐ **Exercice 1.4.** Écrire les nombres suivants sans radicaux au dénominateur.

1. $\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{7} - 2}{\sqrt{7} + 1}$
2. $\frac{3 - \sqrt{8}}{\sqrt{2} - \sqrt{8}}$
3. $\frac{1 + \sqrt{11}}{\sqrt{11} - \sqrt{2}} - \frac{3 - \sqrt{11}}{\sqrt{2} + 1}$
4. $\frac{1 - \sqrt{7}}{2 + \sqrt{7}} - \frac{2 + \sqrt{7}}{1 - \sqrt{7}}$

☐ **Exercice 1.5.** Sans utiliser la calculatrice, simplifier $\sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}}$.

☐ **Exercice 1.6.** Montrer que, pour tous réels a et b, on a $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ avec égalité si et seulement si $a = b$ puis que, pour tous réels positifs x et y on a $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ avec égalité si et seulement si $x = y$.

☐ **Exercice 1.7.** Exprimer sans valeur absolue les expressions suivantes en distinguant les cas suivant les valeurs de x. On pourra par exemple utiliser un tableau de signes permettant de déterminer le signe de chaque expression afin de supprimer correctement la valeur absolue de celle-ci.

1. $f_1(x) = |3 - x|$
2. $f_2(x) = |4 - x^2|$
3. $f_3(x) = |x - 2| + |x + 3|$
4. $f_4(x) = |x + 2| + |1 - x^2|$

1.4 Fonctions ln et exp

On rappelle que e^x existe pour tout x réel et $\ln(x)$ n'existe que si $x > 0$.

$$\ln(1) = 0; \quad \ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b); \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b); \quad \ln(a^n) = n\ln(a) \text{ pour } n \text{ entier}\,; \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

$$\mathrm{e}^{\ln(x)} = x \text{ et } \ln(\mathrm{e}^x) = x; \quad \mathrm{e}^0 = 1; \quad \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a.\mathrm{e}^b; \quad \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}$$

$$\mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}; \quad \mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n \text{ pour } n \text{ entier}\,; \quad \sqrt{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$$

☐ **Exercice 1.8.** Exprimer en fonction de $\ln 2$, $\ln 5$ ou les deux, les réels suivants :

1. $\ln 8$
2. $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$
3. $\ln(16e)$
4. $\ln\left(\frac{64}{e^2}\right)$
5. $\ln 100$
6. $\ln(0.0001)$
7. $\ln\left(\frac{8}{25}\right)$
8. $\ln(32.10^{-8})$

☐ **Exercice 1.9.** Montrer que $\ln(\sqrt{5} - 2) = -\ln(\sqrt{5} + 2)$

☐ **Exercice 1.10.** Simplifier les expressions suivantes

1. $4e^{4x} \times (-5e^{-3x+2})$
2. $\dfrac{e^{3x} + e^{-3x}}{2} \times \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}$
3. $\dfrac{e^{-3x+5} \times (e^{x+2})^3}{e^{-2x-6}}$
4. $e^{3x+5} \times (e^{-x+1})^3 \times (e^{2x-2})^2$

☐ **Exercice 1.11.** Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression algébrique $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est impaire c'est-à-dire vérifie pour tout x réel $f(-x) = -f(x)$.

2 Équations et inéquations

2.1 Outils pour la résolution d'équations et d'inéquations

On commence, dans tous les cas, par déterminer l'ensemble de définition de l'équation ou l'inéquation, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de l'inconnue pour lesquelles celle-ci a un sens. Les valeurs trouvées à la fin de la résolution qui ne sont pas dans l'ensemble de définition devront être exclues.

Manipulation des inégalités dans $\mathbb{R}$

- Pour tout a réel, $x < y \Rightarrow a + x < a + y$.
- Pour tout $a > 0$, $x < y \Rightarrow a.x < a.y$.
- Pour tout $a < 0$, $x < y \Rightarrow a.x > a.y$.
- Pour tous x_1, x_2, y_1, y_2 réels, si $x_1 < y_1$ et $x_2 < y_2$ alors $x_1 + x_2 < y_1 + y_2$.
- Pour tous x_1, x_2, y_1, y_2 réels **positifs**, si $x_1 < y_1$ et $x_2 < y_2$ alors $x_1.x_2 < y_1.y_2$.

Carré et racine carrée

- $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$ (seulement $a = b$ si a et b ont même signe).
- Si $0 < a < b$ alors $0 < a^2 < b^2$ et si $a < b < 0$ alors $0 < b^2 < a^2$.

Inverse : La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$ mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Si $0 < a < b$ alors $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ et si $a < b < 0$ alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.

Par contre, si $a < 0 < b$ alors $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$

Valeur absolue

La méthode générale pour résoudre une équation ou une inéquation contenant une valeur absolue consiste à exprimer celle-ci sans valeur absolue suivant les valeurs de l'inconnue. On exclut enfin les solutions éventuelles qui ne seraient pas dans le domaine de validité. On rappelle aussi que : $|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$

☐ **Exercice 2.1.** Résoudre les équations et inéquations suivantes

1. $\dfrac{x+1}{2x-4} = 3$
2. $(-2x-1)(x+5) \leq 0$
3. $\dfrac{-2x-1}{x+5} \geq 0$
4. $\dfrac{x+1}{2x-4} \geq 3$
5. $\dfrac{1}{2\,x+5} \leq 2$
6. $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-2} < 0$
7. $|x-2| = 5$
8. $|2x-3| = 5$
9. $|x+2| + |x-5| = 11$
10. $|x-3| \leq 2$
11. $|2\,x+1| > 3$
12. $2 \leq |2x-1| < 3$
13. $\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| \leq 1$
14. $\sqrt{(x-1)^2} = 3$

Trinôme du second degré : On appelle trinôme du second degré une expression de la forme $p(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. La mise sous forme canonique permet de déterminer rapidement le signe d'un trinôme, de le factoriser, de déterminer ses racines éventuelles, c'est-à-dire les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $p(x) = 0$ admet 2 racines réelles

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  On a alors $p(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $p(x) = 0$ admet une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et $p(x) = a.(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $p(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle. $p(x)$ n'est pas factorisable comme produit de polynômes de degré 1 à coefficients réels. Pour tout x réel, $p(x)$ est du même signe que $p(0) = c$

Remarque — Lorsque $c = 0$ alors le polynôme est factorisable par x et il est inutile d'utiliser le résultat ci-dessus!

Ce résultat classique vu en classe de Première a été démontré en utilisant la forme canonique d'un polynôme du 2nd degré. Le méthode est rappelée ci-dessous, elle doit être comprise et sera utilisée régulièrement.

Exemple 1

1. Soit $p_1(x) = 2x^2 - 4x + 4$. On commence toujours par factoriser par a s'il est différent de 1.

$$p_1(x) = 2.(x^2 - 2x + 2)$$

   $x^2 - 2x$ est le début du développement de l'identité remarquable $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ que l'on fait alors apparaître complètement

$$p_1(x) = 2.(x^2 - 2x + 1 + 1) = 2((x-1)^2 + 1)$$

   On a obtenu la forme canonique de $p_1(x)$. Comme $2.(1 + (x-1)^2) > 0$, p_1 n'a pas de racines réelles, $p_1(x)$ est toujours positif, sa valeur minimale est 2 et elle est atteinte en $x = 1$.
2. Soit $p_2(x) = 2x^2 - 4x + 2$. On a alors $p_2(x) = 2.(x^2 - 2x + 1) = 2.(x-1)^2$. L'équation $p_2(x) = 0$ admet une seule solution réelle qui est 1 et pour x réel, on a toujours $p_2(x) \geq 0$.
3. Soit $p_3(x) = 2x^2 + 8x + 2$. On a alors $p_3(x) = 2.\left(\underbrace{x^2 + 4x}_{(x+2)^2-4} + 1\right) = 2((x+2)^2 - 3)$. La forme canonique obtenue peut-être ensuite factorisée en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

$$p_3(x) = 2((x+2)^2 - (\sqrt{3})^2) = 2(x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})$$

   L'équation $p_3(x) = 0$ admet donc 2 solutions réelles $-2-\sqrt{3}$ et $-2+\sqrt{3}$. Un tableau de signe montre rapidement que $p_3(x)$ est négatif entre les racines et positif ailleurs.

☐ **Exercice 2.2.** Pour chacune des fonctions polynômes du deuxième degré, calculer la forme canonique puis, si possible, la forme factorisée. Vérifier (si c'est vraiment nécessaire...) les résultats obtenus à l'aide des formules utilisant le discriminant.

1. $x^2 - 4x - 5$
2. $x^2 + x + 1$
3. $x^2 + 8x - 33$
4. $2x^2 + 8x - 16$
5. $-3x^2 + 12x - 25$
6. $x^2 + 12x + 34$
7. $x^2 - 4x$
8. $\dfrac{1}{3}x^2 + 6x - 1$
9. $2x^2 + 4x + 5$

☐ **Exercice 2.3.** Résoudre les inéquations

1. $\dfrac{-2x-1}{x+5} \geq 3$
2. $\dfrac{3x-1}{x+4} \leq 2$
3. $\dfrac{-2x+16}{-x+2} \geq x+7$
4. $\dfrac{x+2}{2x+5} \geq \dfrac{2x+5}{x+2}$

en évitant bien sûr tout "produit en croix" abusif conduisant à multiplier une inégalité par une expression algébrique dont on ne connaît pas le signe...

☐ **Exercice 2.4.** Quels sont les réels x tels que

$$f(x) = (x^2 - 3)(1 - \sqrt{x})(|x| - 6)(|4x + 3|)$$

soit strictement positif?

Fonctions exponentielle et logarithme népérien : Les fonctions exp et ln sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ et $]0, +\infty[$ respectivement et, pour la résolution des équations et inéquations, on peut ajouter les propriétés suivantes aux propriétés algébriques déjà données précédemment.

- Pour tous a et b réels, $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et pour tous a et b strictement positifs, $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- Pour tous a et b réels, $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ et pour tous a et b strictement positifs, $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$

Remarque — Vous remarquerez que les propriétés précédentes n'ont rien à voir avec l'implication fantaisiste $\ln(a) \leq \ln(b) + \ln(c) \Rightarrow a \leq b + c$ qui est tout aussi fausse avec exp!!

☐ **Exercice 2.5.** Pour chaque équation ou inéquation à résoudre, commencer par déterminer l'ensemble E des réels pour lesquels elle a un sens (dans une expression de la forme $\ln(u(x))$, $u(x)$ doit être strictement positif!) puis la résoudre sur E.

1. $\ln(x+3) = 1$
2. $\ln(2+5x) = 0$
3. $\ln(x^2) = 9$
4. $\ln(-2-5x) \geq 4$
5. $\ln(1+e^x) < 1$
6. $\ln(1-e^{-x}) \geq 2$
7. $e^{2x-3} = 7$
8. $e^{1-4x} \leq 1$
9. $\ln(2-5x) = \ln(3x+4)$
10. $\ln(x^2) = \ln(3x)$
11. $\ln(3+2x) > \ln(1-x)$
12. $\ln(x+2) \leq \ln(x^2-4)$

3 Autour du formulaire de trigonométrie

3.1 Formules de base, angles associés

Les définitions et propriétés des cosinus et sinus d'un réel x (angle exprimé en radians) ont été étudiés en classe de Première. L'objectif de ce travail est de revoir les formules usuelles et de les utiliser dans le cadre d'exercices d'application directe.

La première série de formules à connaître se retrouve directement à partir d'un dessin du cercle trigonométrique et d'un angle donné x. Les formules 4 à 13 concernent les angles dits "associés" à x c'est-à-dire $-x$, $\pi - x$, $\pi + x$, $\pi/2 - x$, $\pi/2 + x$.

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
2. $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
3. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
4. $\cos(-x) = \cos(x)$
5. $\sin(-x) = -\sin(x)$
6. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
7. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
8. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
9. $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
10. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
11. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
12. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
13. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

☐ **Exercice 3.1.**

1. Représenter sur le cercle trigonométrique un point M tel que la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$ soit égale à x (x arbitrairement fixé entre 0 et $\pi/4$), l'abscisse de M est donc $\cos(x)$ et son ordonnée est $\sin(x)$. Rappeler d'où vient la première formule énoncée ci-dessus.
2. Placer M_1 correspondant à l'angle $-x$ et vérifier sur le dessin les formules 4 et 5.
3. Faire de même pour les points correspondants aux angles $\pi - x$, $\pi + x$, $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$.

☐ **Exercice 3.2.** Compléter le tableau suivant en utilisant les formules précédentes et sachant que, pour $\cos(x) \neq 0$, on pose $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$													
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$													
$\tan(x)$																

☐ **Exercice 3.3.** En se ramenant à la mesure principale de l'angle (valeur comprise dans $]-\pi;\pi]$) où à celle comprise dans $[0;2\pi[$, calculer les valeurs suivantes

1. $\cos\left(-\dfrac{16\pi}{3}\right)$
2. $\sin\left(\dfrac{37\pi}{6}\right)$
3. $\cos\left(\dfrac{25\pi}{4}\right)$
4. $\sin\left(-\dfrac{19\pi}{3}\right)$
5. $\sin\left(\dfrac{41\pi}{6}\right)$
6. $\cos\left(\dfrac{84\pi}{3}\right)$
7. $\sin\left(-\dfrac{33\pi}{2}\right)$
8. $\cos\left(\dfrac{53\pi}{6}\right)$
9. $\sin\left(-\dfrac{22\pi}{4}\right)$

☐ **Exercice 3.4.** Parmi les expressions suivantes, une seule est différente de $\sin(-x)$. Laquelle ?

1. $-\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
2. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} + x\right)$
3. $\sin(x - \pi)$
4. $\cos\left(-x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
5. $\sin(x + 3\pi)$

☐ **Exercice 3.5.** Simplifier les sommes suivantes.

1. $A = \cos(-x) - 2\cos(3\pi - x) + \cos(5\pi + x)$
2. $B = \sin(x + 5\pi) + 3\sin(x + 3\pi) - \sin(-x)$
3. $C = \cos(-x) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$
4. $D = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(5\pi + x)$
5. $E = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$
6. $F = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{13\pi}{7}\right)$
7. $G = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$
8. $H = \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \ldots + \sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

3.2 Résolution d'équations trigonométriques

Il est essentiel de retenir les cas d'égalité des sinus et des cosinus car ils sont indispensables à la résolution d'équations trigonométriques. ils peuvent être retrouvés rapidement en s'aidant du s'aidant du cercle trigonométrique car ce sont des conséquences des formules de base.

$\cos a = \cos b$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + k.2\pi$ ou il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = -b + k.2\pi$.

$\sin a = \sin b$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + k.2\pi$ ou il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = \pi - b + k.2\pi$.

$\cos a = \sin b$ si et seulement si $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin b$ et on est ramené à une égalité de sinus, problème traité au point précédent.

L'application de ces formules se fait en Terminale de la façon suivante

Exemple 2

Soit à résoudre sur $]-\pi, \pi]$ l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$, on cherche un nombre réel θ dont le cosinus est $\frac{1}{2}$. En utilisant par exemple le cercle trigonométrique, on en déduit que l'ensemble des solutions est $\{\theta, -\theta\}$.
Soit à résoudre sur $]-\pi, \pi]$ l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$, on cherche un nombre réel θ dont le sinus est $\frac{1}{2}$. En utilisant par exemple le cercle trigonométrique, on en déduit que l'ensemble des solutions est $\{\theta, \pi - \theta\}$.
Attention à adapter le raisonnement précédent en fonction de l'angle θ trouvé. Si le θ trouvé est négatif dans le cas d'une équation avec le sinus, $\pi - \theta$ n'appartient alors plus à $]-\pi, \pi]$. Le mieux est toujours de représenter la situation sur le cercle trigonométrique.

□ **Exercice 3.6.** Résoudre dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ les équations suivantes

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos(x) + 1 = \frac{1}{2}$
3. $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\cos(x) = -\frac{3}{2}$
5. $\sin(x) = \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
6. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$
8. $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$
9. $(\cos(x))^2 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2$
10. $(\sin(x))^2 = \left(\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2$

□ **Exercice 3.7.** Résoudre sur l'intervalle I donné en posant un changement de variable adapté de la forme $\mathrm{X} = a.x$

1. $\cos(2x) - \frac{1}{2} = 0$, $\mathrm{I} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\cos(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\mathrm{I} = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$
3. $1 + \sin(5x) = \frac{-\sqrt{3}+2}{2}$, $\mathrm{I} = \left[-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right]$

4 Dérivation et intégration

Objectif : utiliser les formules de dérivation vues en lycée à la fois dans le cadre de la dérivation directe et du calcul de primitives et d'intégrales.

4.1 Dérivation et intégration de fonctions simples

On commence par revoir les formules de dérivation des fonctions usuelles "simples" ainsi que les formules de dérivation de sommes, produit, quotient. Étant donné le rôle fondamental joué par la notion de dérivation dans tous les domaines scientifiques, il faut viser une vraie aisance dans les calculs et ne pas se tromper de sens dans l'application des formules. Les deux types de calculs sont mélangés volontairement dans les exercices qui suivent.

□ **Exercice 4.1.** Calculer la dérivée des fonctions d'expression $f(x)$ donnée pour les questions impaires (Exceptionnellement, on ne se préoccupe pas du domaine de validité). Pour les questions paires, calculer l'intégrale.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$
2. $\displaystyle\int_0^1 x^2 - 3x + 2\,\mathrm{d}x$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 2x^3 + 1}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^4 - 2x^3 + 1\,\mathrm{d}x$
5. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{1 - x - x^2}$
6. $\displaystyle\int_1^3 x^3 - \frac{2}{x^2} + 1\,\mathrm{d}x$
7. $f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x + \sqrt{x}}$
8. $\displaystyle\int_1^4 \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
9. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
11. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$
12. $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^3\sqrt{x} + x^2 + 2x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

13. $f(x) = (x^2 - 3x + 2).e^x$

14. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3 + xe^x}{x}\,\mathrm{d}x$

15. $f(x) = (x^3 - 5x^2 + x + 2).\ln(x)$

16. $\displaystyle\int_1^{\ln 2} (2x+1).e^x\,\mathrm{d}x$

Pour cette dernière intégrale, on déterminera les constantes a et b telles que la fonction $\mathrm{F}(x) = (ax+b).e^x$ soit une primitive de la fonction à intégrer c'est-à-dire telle que $\mathrm{F}'(x) = (2x+1).e^x$.

4.2 Dérivation et intégration des formes composées usuelles

Le prochain exercice porte sur les fonctions composées d'une fonction logarithme, puissance ou racine carrée avec une fonction u dérivable et parfois strictement positive. Il peut être nécessaire pour (re)créer des automatismes de bien identifier la fonction u en question et sa dérivée u'.

Les formules de dérivation à utiliser sont ici les suivantes (elles peuvent être bien sur associées aux formules de dérivation de produit ou quotient...)

Si $f(x) = \ln(u(x))$ alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Si $f(x) = (u(x))^n$ avec n entier relatif alors $f'(x) = n.u'(x).(u(x))^{n-1}$.

Si $f(x) = \sqrt{u(x)}$ alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Les règles de recherche de primitive correspondantes sont

Si $f(x) = u'(x).(u(x))^n$ alors les primitives sont de la forme $\mathrm{F}(x) = \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ si $n \neq -1$ et $\mathrm{F}(x) = \ln(u(x)) + \mathrm{C}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ si $n = -1$.

Si $f(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ alors une primitive est de la forme $\mathrm{F}(x) = \sqrt{u(x)} + \mathrm{C}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

Exemple 3

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{(x^3+3x+1)^2} = (x^3+3x+1)^{-2}$. Ici $n = -2$, $u(x) = x^3 + 3x + 1$ et $u'(x) = 3x^2 + 3$, l'application de la formule donne

$$f'(x) = -2.(3x^2+3).(x^3+3x+1)^{-3} = \frac{-6x^2-6}{(x^3+3x+1)^3}$$

Exemple 4

Soit à calculer $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ où $g(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^4} = (2x+1)^{-4}$. Ici $u(x) = 2x+1$ et $n = -4$, on fait apparaître le $u'(x)$ qui manque et qui est constant en écrivant $g(x) = \frac{1}{2}.2.(2x+1)^{-4}$, ce qui permet d'effectuer le calcul en utilisant la linéarité de l'intégrale.

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{2}.2.(2x+1)^{-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 2.(2x+1)^{-4}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(2x+1)^{-4+1}}{-4+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3^{-3}}{-3}-\frac{(1)^{-3}}{-3}\right)\\ &= -\frac{1}{6}\times\left(-\frac{26}{27}\right) = \frac{13}{81}\end{aligned}$$

Exemple 5

Soit à calculer $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$ où $h(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$. Ici $u(x) = x^2+1$ et $u'(x) = 2x$. On fait apparaître la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ comme précédemment en transformant l'expression à intégrer.

$$\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{3}{2}.\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{3}{2}.\ln 2$$

□ **Exercice 4.2.** Calculer la dérivée des fonctions d'expression $f(x)$ donnée pour les questions impaires (Exceptionnellement, on ne se préoccupe pas du domaine de validité). Pour les questions paires, calculer l'intégrale.

1. $f(x) = (3+4x)^{10}$
2. $\displaystyle\int_1^2 (2x-1)^3\,\mathrm{d}x$
3. $f(x) = (1+\sqrt{x})^2$
4. $\displaystyle\int_0^1 (3t-1)^{50}\,\mathrm{d}t$
5. $f(x) = \sqrt{3x+2}$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3t+2}}\,\mathrm{d}t$
7. $f(x) = (\sqrt{2x^2+1})^3$
8. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{3x^2-1}}\,\mathrm{d}x$
9. $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$
10. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x+2)^2}\,\mathrm{d}x$
11. $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{2x+3}\right)^2$
12. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+2}\,\mathrm{d}x$
13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$
14. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$
15. $f(x) = \ln\left(x^2+3x+2\right)$
16. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x.\ln(x)}\,\mathrm{d}x$
17. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
18. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x.\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x$
19. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-3}\right)$
20. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}}\,\mathrm{d}x$
21. $f(x) = \ln(\cos(x))$
22. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x-2}\,\mathrm{d}x$

Pour le prochain exercice, on inclut les formules de dérivation composée et d'intégration relatives aux fonctions circulaires et exponentielle. Les formules au programme de la classe de terminale sont :

Si $f(x) = e^{u(x)}$ alors $f'(x) = u'(x).e^{u(x)}$.

Si $f(x) = \cos(u(x))$ alors $f'(x) = -u'(x).\sin(u(x))$.

Si $f(x) = \sin(u(x))$ alors $f'(x) = u'(x).\cos(u(x))$.

Les règles de recherche de primitive correspondantes sont

Si $f(x) = u'(x).e^{u(x)}$ alors une primitive est de la forme $\mathrm{F}(x) = e^{u(x)} + \mathrm{C}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

Si $f(x) = u'(x).\sin(u(x))$ alors une primitive est de la forme $\mathrm{F}(x) = -\cos(u(x)) + \mathrm{C}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

Si $f(x) = u'(x).\cos(u(x))$ alors une primitive est de la forme $\mathrm{F}(x) = \sin(u(x)) + \mathrm{C}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

Remarque — Les dernières formules seront utilisées dans les exercices qui suivent dans le cas particulier où $u(x) = ax + b$ avec a et b deux nombres réels Si $f(x) = \sin(ax + b)$ alors une primitive est de la forme $\mathrm{F}(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + \mathrm{C}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

Si $f(x) = \cos(ax + b)$ alors une primitive est de la forme $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{a}\sin(ax + b) + \mathrm{C}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

□ **Exercice 4.3.** Calculer la dérivée des fonctions d'expression $f(x)$ donnée pour les questions impaires (Exceptionnellement, on ne se préoccupe pas du domaine de validité). Pour les questions paires, calculer l'intégrale.

1. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
2. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} + 2x}\,\mathrm{d}x$
3. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$
5. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
6. $\displaystyle\int_0^1 e^{3-2x}\,\mathrm{d}x$
7. $f(x) = \dfrac{1}{\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)}$
8. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos(3x)}{\sin^4(3x)}\,\mathrm{d}x$
9. $f(x) = e^{\frac{3x-1}{x^2+4}}$
10. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{2x}.(1 + e^{2x})^5\,\mathrm{d}x$
11. $f(x) = \dfrac{e^{\cos(2x)}}{e^{\sin(2x)}}$
12. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x).(1 - \cos(2x))^5\,\mathrm{d}x$
13. $f(x) = x^2.e^{x^2}$
14. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(2x)}{(2 + 3\sin(2x))^3}\,\mathrm{d}x$

5 Éléments de réponse aux exercices

1.2

1. $\frac{b}{a^4}$
2. $\frac{b^6}{a}$
3. $a^8.b^{14}$
4. $a^7b^5c^{10}$

1.5 En faisant apparaître, par exemple, des puissances de 2 on obtient 16.

1.6 La première inégalité à montrer vient d'une identité remarquable classique

1.7

1. $f_1(x) = \begin{cases} 3-x \text{ si } x \leq 3 \\ x-3 \text{ si } x > 3 \end{cases}$
2. $f_2(x) = |(2-x)(2+x)| = \begin{cases} 4-x^2 \text{ si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2-4 \text{ sinon} \end{cases}$
3. $f_3(x) = \begin{cases} x-2+x+3 = 2x+1 \text{ si } x \geq 2 \\ 2-x+x+3 = 5 \text{ si } -3 \leq x < 2 \\ 2-x-3-x = -1-2x \text{ si } x < -3 \end{cases}$
4. $f_4(x) = \begin{cases} (x+2)+(x^2-1) \text{ si } x \geq 1 \\ (x+2)+(1-x^2) \text{ si } -1 \leq x < 1 \\ (x+2)+(x^2-1) \text{ si } -2 \leq x < 1 \\ (-x-2)+(x^2-1) \text{ si } x < -2 \end{cases}$

1.9 Pour montrer que 2 nombres sont opposés, on peut montrer que leur somme est nulle, la propriété fondamentale du ln fait le reste du travail ici.

2.1

1. $\frac{13}{5}$
2. $]-\infty;-5] \cup [-\frac{1}{2};+\infty[$
3. $]-5;-\frac{1}{2}]$
4. $]-\infty;2[\cup[\frac{13}{5};+\infty[$
5. $]-\infty;-\frac{5}{2}[\cup[-\frac{9}{4};+\infty[$
6. $]-\infty;2[\cup]\frac{5}{2};3[$
7. $\{-3,7\}$
8. $\{-1,4\}$
9. $\{-4,7\}$
10. $[1;5]$
11. $]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$
12. $]-1;\frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2};2[$
13. $]-\infty;0]$
14. $\{-2,4\}$

2.2

1. $(x-2)^2-9 = (x-5).(x+1)$
2. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$
3. $(x+4)^2-49 = (x-3)(x+11)$
4. $2\left((x+2)^2-12\right) = 2(x+2-2\sqrt{3})(x+2+2\sqrt{3})$
5. $-3\left((x-2)^2+\frac{13}{3}\right)$
6. $(x+6)^2-2 = (x+6-\sqrt{2})(x+6+\sqrt{2})$
7. $x.(x-4)$
8. $\frac{1}{3}\left((x+9)^2-84\right) =$
$\frac{1}{3}\left(x+9+2\sqrt{21}\right)\left(x+9-2\sqrt{21}\right)$
9. $2(x+1)^2+3$
10.

2.3

1. $\left]-5,-\frac{16}{5}\right]$
2. $]-4,9]$
3. $]-\infty,-2]\cup[-1,2[$
4. $\left[-3,-\frac{5}{2}\right[\cup\left[-\frac{7}{3},-2\right[$

2.4 La fonction n'est définie que si $x \geq 0$. $f(x)$ est alors strictement positif si et seulement si $x \in [0,1[\cup]\sqrt{3},6[$.

2.5

1. $\{e-3\}$
2. $\left\{-\dfrac{1}{5}\right\}$
3. $\left\{e^{9/2}\right\}$
4. $\left[\dfrac{-e^4-2}{5}\right]$
5. $]-\infty,\ln(e-1)[$
6. $\emptyset$: (ensemble vide, pas de solution)
7. $\left\{\frac{1}{2}(\ln(7)+3)\right\}$
8. $\left[\frac{1}{4},+\infty\right[$
9. $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$
10. $\{3\}$
11. $\left]-\frac{2}{3},1\right[$
12. $[3,+\infty[$

3.3

1. $-\frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\frac{1}{2}$
6. 1
7. -1
8. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
9. 1

3.4 $\cos(\pi/2-x)=\sin(x)$

3.5

1. $A=2\cos(x)$
2. $B=-3\sin(x)$
3. $C=0$
4. $D=-2\cos(x)$
5. $E=0$
6. $F=0$
7. $G=2$
8. $H=6$

3.6

1. $\left\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$
2. $\left\{-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right\}$
3. $\left\{-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$
4. $\emptyset$
5. $\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$
6. $\left\{-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right\}$
7. $\left\{-\frac{\pi}{7},\frac{\pi}{7}\right\}$
8. $\left\{\frac{\pi}{7},\frac{6\pi}{7}\right\}$
9. $\left\{-\frac{2\pi}{5},\frac{2\pi}{5},-\frac{3\pi}{5},\frac{3\pi}{5}\right\}$
10. $\left\{-\frac{2\pi}{5},\frac{2\pi}{5},-\frac{3\pi}{5},\frac{3\pi}{5}\right\}$

3.7

1. $\left\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$
2. $\left\{-\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{9}\right\}$
3. $\left\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$

4.1 ;

1. $3x^2-6x+2$
2. $\frac{5}{6}$
3. $\frac{-4x^3+6x^2}{(x^4-2x^3+1)^2}$
4. $\frac{19}{40}$
5. $\frac{4x+2}{(x^2+x-1)^2}$
6. $\frac{62}{3}$
7. $-\frac{2\sqrt{x}\ln x+\ln x-x-2\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}\right)^2}$
8. $\frac{11}{2}$ (séparer les termes de la somme)
9. $\frac{1}{\cos^2(x)}$
10. 2
11. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$
12. $4\ln(2)+\frac{41}{4}$
13. $(x^2-x-1).e^x$
14. $3\ln(2)+e^2-e$
15. $(3x^2-10x+1).\ln(x)+x^2-5x+1+2/x$
16. $4\ln(2)-e-2$

4.2 ;

1. $40.(3+4x)^9$
2. 10
3. $\frac{1}{\sqrt{x}}+1$
4. $\frac{2^{51}+1}{153}$
5. $\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$
6. $\frac{2}{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})$
7. $6x\sqrt{2*x^2+1}$
8. $\frac{1}{3}(\sqrt{11}-\sqrt{2})$
9. $\frac{2x^2-2}{\sqrt{2-x^2}}$
10. $\frac{1}{12}$
11. $\frac{2(x+1)}{(2x+3)^3}$
12. $2\ln(2)-\ln(3)$
13. $-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$
14. $\frac{1}{2}$
15. $\frac{2x+3}{x^2+3x+2}$
16. $\ln(2)$
17. $-\frac{1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$
18. $\frac{3}{8}$
19. $\frac{-12x}{(x^2-3)(x^2+3)}$
20. $\sqrt{3}-2.\sqrt{2}$
21. $\frac{\sin x}{\cos x}$
22. $-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+2\right)$

4.3 ;

1. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

2. $\dfrac{\ln(4+2\ln(2))}{2}$

3. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

4. $e - e^{\frac{1}{2}}$

5. $\dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

6. $\dfrac{e^3 - e}{2}$

7. $\dfrac{3\cos(3x)}{\sin^2(3x)}$

8. $\dfrac{1-2\sqrt{2}}{9}$

9. $\dfrac{\left(3x^2 - 2x - 12\right) e^{\frac{3x-1}{x^2+4}}}{\left(x^2+4\right)^2}$

10. $\dfrac{5187}{4}$

11. $-2\,(\sin(2x) + \cos(2x))\, e^{\cos(2x) - \sin(2x)}$

12. $\dfrac{16}{3}$

13. $-2\,(x-1)\,x\,(x+1)\,e^{-x^2}$

14. $\dfrac{7}{400}$